НЕОБХОДИМОЕ УСЛОВИЕ В ЗАДАЧЕ ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ ДЛЯ СИСТЕМ ГУРСА-ДАРБУ С ГРАНИЧНЫМИ И РАСПРЕДЕЛЕННЫМИ УПРАВЛЕНИЯМИ ПРИ НЕЛОКАЛЬНЫХ УСЛОВИЯХ

А.Р.САФАРИ
Бакинский Государственный Университет
as_alisafari@yahoo.com

В работе получено необходимое условие оптимальности с граничными и распределенными управлениями для систем Гурса-Дарбу при нелокальных условиях. Граничные условия заданы на характеристиках в виде решения дифференциального уравнения и решения дифференциального уравнения удовлетворяют интегральному условию.

В данной работе рассматривается оптимизационная задача с распределенными и граничными условиями для систем Гурса-Дарбу с нелокальными условиями. Получены необходимые условия оптимальности для рассматриваемой задачи оптимального управления.

Отметим, что задачи оптимального управления с нелокальными краевыми условиями для систем Гурса-Дарбу рассмотрены также в работах [1-4], где все граничные условия заданы в интегральном виде.

Постановка задачи.

Рассмотрим управляемую начально-краевую задачу для системы Гурса-Дарбу:

$$y_{ts} = f(t,s,y(t,s),y_t(t,s),y_s(t,s),u),\ (t,s)\in Q=(0,T)\times(0,\lambda),\tag{2.1}$$

$$y_t(t,0)=\varphi(t,y(t,0),v),\qquad t\in[0,T],\tag{2.2}$$

$$y_s(0,s)=\psi(s),\qquad s\in[0,\lambda],\tag{2.3}$$

$$y(0,0)+\int_0^T n(t)y(t,0)dt = c\ .\tag{2.4}$$

Будем считать, что класс допустимых управлений состоит из функций $w=(v,u)$, где

$$w=(\ v(\cdot),u(\cdot)\ )\in V\times U\subset L_2^q([0,T])\times L_2^r(Q).\tag{2.5}$$

Под решением задачи (2.1)-(2.4), соответствующей выбранному допустимому управлению $w=(v,u)\in V\times U$, понимается функция $y(t,s)\in L_2^n(Q)$, имеющая обобщенные производные по Соболеву $y_t(t,s), y_s(t,s)$ и $y_{ts}(t,s)$, принадлежащие $L_2^n(Q)$ и удовлетворяющие уравнению (2.1) почти всюду Q, а условиям (2.2), (2.3) - в смысле равенства соответствующих следов.

На решениях начально-краевой задачи (2.1)-(2.4) и на множестве допустимых управлений (2.5) определим функционал

$$J(w)=\sum_{i=1}^{k}\Phi(y(t_i,s_i)) \ , \tag{2.6}$$

где $(t_i,s_i)\in Q, i=\overline{1,k}$ - произвольный фиксированный набор точек.

Рассмотрим следующую задачу оптимального управления: минимизировать функционал (2.6) при ограничениях (2.1)-(2.5).

Предполагается, что $y\in R^n$ - состояние; $u\in R^r$ и $v\in R^q$ - управления; t,s - скалярные независимые переменные; T,λ - заданные положительные числа; f,F,Φ,φ,ψ - заданные функции, а $c\in R^n$ - фиксированная точка; $n(t)=(n_{ij}(t)), i,j=\overline{1,n}$ - известная матрица функция; V и U - заданные множества.

На функции, входящие в описание задачи (2.1)-(2.6), накладываются следующие условия:

1. Пусть функция $f(t,s,y,p,q,u)$ из правой части (2.1) для почти всех $(t,s)\in Q$ непрерывна по $(y,p,q,u)\in R^{3n}\times R^r$, а при фиксированных $(x,p,q,u)\in R^{3n}\times R^r$ измерима по $(t,s)\in Q$.

2. Пусть функция $\varphi(t,y,v)$ из (2.2) для почти всех $t\in[0,T]$ непрерывна по $y\in R^n, v\in R^q$, измерима по $t\in[0,T]$ при каждом фиксированном $y\in R^n, v\in R^q$.

3. $\psi(s)\in L_2^n[0,\lambda]$.

4. $n(t)\in L_2^{n\times n}(0,T)$, причем $\left\| \int_0^T n(t)dt \right\| <1$.

5. $V\times U\subset L_2^q([0,T])\times L_2^r(Q)$ - выпуклое замкнутое множество.

6. Функция $\Phi(y), y\in R^n$ обладает непрерывные частные производные $\Phi_y(y)$ при всех $y\in R^n$.

7. Пусть существуют неотрицательные константы K_1 и K_2 такие, что

$|\varphi(t,0,0)|\le K_1$ для почти всех $t\in[0,T]$.

$|\varphi_y(t,y,v)|\le K_2$ для почти всех $t\in[0,T]$, $y\in R^n$, $v\in R^r$.

8. Пусть функция $f(t,s,y,p,q,u)$ и f_y,f_p,f_q,f_u - частные производные удовлетворяют условию Липшица по $(x,p,q,u)\in R^{3n}\times R^r$.

9. Пусть функция $\varphi(t,y,v)$ и частные производные $\varphi_y(t,y,v)$, $\varphi_v(t,y,v)$ удовлетворяют условию Липшица по $y\in R^n$.

Можно показать, что вектор-функция $y(t,s)$ является решением начально-краевой задачи (2.1)-(2.5) тогда и только тогда, когда она удовлетворяет интегральному уравнению

$$y(t,s)=\tilde{n}^{-1}(T)c-\tilde{n}^{-1}(T)\int_0^T n(t)\int_0^t \varphi(\tau,y(\tau,0),v(\tau))ddt+\int_0^t \varphi(\tau,z(\tau,0),v(\tau))d\tau+$$

$$+\int_0^s \psi(r)dr+\int_0^t\int_0^s F(\tau,r,y(\tau,r),y_\tau(\tau,r),y_r(\tau,r),u(\tau,r))ddr,$$

где $\tilde{n}(T)=E+\int_0^T n(t)dt,\ \tilde{n}^{-1}(T)=(E+\int_0^T n(t)dt)^{-1}$.

С помощью метода последовательных приближений можно доказать, что при

$$K_2T\left[1+\tilde{n}_1(T)\right]\left\|\tilde{n}^{-1}(T)\right\|<1 \tag{2.7}$$

начально-краевая задача (2.1)-(2.5) при каждом фиксированном допустимом управлении $u\in U$ имеет единственное решение, где $\tilde{n}_1(T)=\max\limits_{[0,T]}\left|\int_0^t n(\tau)d\tau\right|$.

Основные результаты.

Теорема 1. Пусть выполняются условия **1-9** и (2.7). Тогда функционал (2.6) при ограничениях (2.1)-(2.4) непрерывен и дифференцируем по $w\in V\times U$ в норме $L_2^q([0,T])\times L_2^r(Q)$, причем ее градиент $J'(w)\in L_2^q([0,T])\times L_2^r(Q)$ в точке $w=(v(t),u(t,s))$ представим в виде

$$J'(w)=\{\ H_u(t,s,y,y_z,y_s,u,\psi);H_{1v}(t,y(t,0),\psi_1(t),v)\ \}, \tag{3.1}$$

где $y(t,s)=y(t,s;w)$, $(t,s)\in Q$ - решение начальной краевой задачи (2.1)-(2.4), а $(\psi(t,s;w),\psi_1(t,w))$ является решением сопряженной системы:

$$\psi(t,s)=\sum_{i=1}^k\Phi_y(y(t_i,s_i))\delta(t_i-t)\delta(s_i-s)+\int_t^T\tilde{H}_q(\tau,s)d\tau+\int_s^\lambda\tilde{H}_p(t,r)dr+$$

$$+\int_t^T\int_s^\lambda H_y(\tau,r)d\,d\,r,$$

$$\psi_1(t)=\sum_{i=1}^k\Phi_y(y(t_i,s_i))\delta(t_i-t)+\int_0^\lambda\int_t^T\tilde{H}_y(\tau,s)d\,\tau\,ds+\int_0^\lambda\tilde{H}_p(t,s)ds+$$

$$+\int_t^T\tilde{H}_{1y}(\tau)d\tau-(\tilde{n}^{-1}(T)\int_t^T n(\tau)d\tau)'\left[\sum_{i=1}^k\Phi_y(y(t_i,s_i))+\right.$$

$$\left.+\int_0^T\int_0^\lambda\tilde{H}_y(t,s)dtds+\int_0^T\tilde{H}_{1y}(t)dt\right],$$

$$\delta(t_i-t)=\begin{cases}0, & \text{åñëè}\quad t_i<t\\ 1, & \text{åñëè}\quad t_i\ge t,\end{cases}\qquad \delta(s_i-s)=\begin{cases}0, & \text{åñëè}\quad s_i<s\\ 1, & \text{åñëè}\quad s_i\ge s,\end{cases}$$

$$H_1(t,y(t,o),\psi_1(t),v)=\left\langle\psi_1(t),\varphi(t,y(t,0),v)\right\rangle$$

Доказательство.

Пусть $y,y+\bar{y}$ - решения задачи (2.1)-(2.4), соответствующие управлениям $w,w+\bar{w}\in U$.

Введем систему уравнений в вариациях:

$$z_{ts}=\tilde{f}_y(t,s)z(t,s)+\tilde{f}_p(t,s)z_t(t,s)+\tilde{f}_q(t,s)z_s(t,s)+\tilde{f}_u(t,s)\bar{u}(t,s)\ , \tag{3.2}$$

$$z_t(t,0)=\varphi_y(t,y(t,0))z(t,0)+\varphi_v\big(t,y(t,0),v(t)\big)\overline{v}(t)\ , \tag{3.3}$$

$$z_s(0,s)=0\,, \tag{3.4}$$

$$z(0,0)+\int_0^T n(t)z(t,0)dt=0 \tag{3.5}$$

Вычисляя приращение функционала (2.6), получим

$$J(w+\overline{w})-J(w)=\sum_{i=1}^{k}\Big\langle \Phi_y(y(t_i,s_i)),z(t_i,s_i)\Big\rangle+\eta, \tag{3.6}$$

где

$$\eta=\sum_{i=1}^{k}\ \Big\langle \Phi_y(y(t_i,s_i)),\overline{y}(t_is_i)-z(t_i,s_s)\Big\rangle+$$

$$+\sum_{i=1}^{k}\Big[\Phi(y(t_i,s_{_i})+\overline{y}(t_i,s_i))-\Phi(y(t_i,s_i))-\Big\langle \Phi_y(y(t_i,s_i)),\overline{y}(t_i,s_i)\Big\rangle\ \Big]$$

Умножим (3.2) на некоторую функцию $\psi(t,s)$, а (3.3)- на некоторую функции $\psi_1(t)$, проинтегрируем по области Q и прибавим к (3.6):

$$\Delta J(w)=\sum_{i=1}^{k}\Big\langle \Phi_y(y(t_i,s_i),z(t_i,s_i)\ \ \Big\rangle+\int_0^T\int_0^{\lambda}\Big[\Big\langle \widetilde{H}_y(t,s),z(t,s)\Big\rangle+\Big\langle \widetilde{H}_p(t,s),z_t(t,s)\Big\rangle+$$

$$+\Big\langle \widetilde{H}_q(t,s),z_s(t,s)\Big\rangle+\Big\langle H_u(t,s),\overline{u}(t,s)\Big\rangle+\Big\langle -\psi(t,s),z_{ts}\Big\rangle\Big]dtds+ \tag{3.7}$$

$$+\Big[\ \int_0^T\Big\langle -\psi_1(t),z_t(t,0)\Big\rangle+\Big\langle \widetilde{H}_{1y}(t),z(t,0)\Big\rangle\ \Big]dt+\eta$$

Используя формулу интегрирования по частям и теорему Фубини, имеем:

$$\int_0^T\int_0^{\lambda}\Big\langle \widetilde{H}_y(t,s),z(t,s)\Big\rangle dtds=\left\langle \int_0^T\int_s^{\lambda}\widetilde{H}_y(t,s)dtds,z(0,0)\right\rangle+$$

$$+\int_0^{\lambda}\left\langle \int_0^T\int_s^{\lambda}\widetilde{H}_y(t,r)drdt,z_s(0,s)\right\rangle ds+\int_0^T\left\langle \int_0^{\lambda}\int_t^T\widetilde{H}_y(\tau,s)d\,\tau\,ds,z_t(t,0)\right\rangle dt+ \tag{3.8}$$

$$+\int_0^T\int_0^{\lambda}\left\langle \int_s^{\lambda}\int_t^T\widetilde{H}_y(\tau,r)d\,\tau\,dr,z_{ts}(t,s)\right\rangle dtds,$$

$$\int_0^T\int_0^{\lambda}\Big\langle \widetilde{H}_p(t,s),z_t(t,s)\Big\rangle dtds=\int_0^T\int_0^{\lambda}\Big\langle \widetilde{H}_p(t,s),z_t(t,0)\Big\rangle dtds+$$

$$+\int_0^T\int_0^{\lambda}\left\langle \int_s^{\lambda}\widetilde{H}_p(t,r)dr,z_{ts}(t,s)\right\rangle dtds, \tag{3.9}$$

$$\int_0^T\int_0^{\lambda}\Big\langle \widetilde{H}_q(t,s),z_s(t,s)\Big\rangle dtds=\int_0^T\int_0^{\lambda}\Big\langle \widetilde{H}_q(t,s),z_s(0,s)\Big\rangle dtds+$$

$$+\int_0^T\int_0^{\lambda}\left\langle \int_t^T\widetilde{H}_q(\tau,s)d\tau,z_{ts}(t,s)\right\rangle dtds\ . \tag{3.10}$$

Используя равенства

$$z(t_i,s_i)=z(0,0)+\int_0^{\lambda} z_s(0,s)\delta(s_i-s)ds+\int_0^{t} z_t(t,0)\delta(t_i-t)dt+$$
$$+\int_0^{T}\int_0^{\lambda} z_{ts}(t,s)\delta(t_i-t)\delta(s_i-s)dtds \qquad (3.11)$$

и учитывая (3.8)-(3.11) в (3.7), получим

$$\Delta J(w)=J(w+\overline{w})-J(w)=\sum_{i=1}^{k}\left\langle \Phi_y(y(t_i,s_i),z(0,0)\right\rangle+$$
$$+\int_0^{\lambda} z_s(0,s)\delta(s_i-s)ds+\int_0^{T} z_t(t,0)\delta(t_i-t)dt+$$
$$+\int_0^{T}\int_0^{\lambda} z_{ts}\delta(t_i-t)\delta(s_i-s)dtds+\left\langle\int_0^{T}\int_0^{\lambda}\widetilde{H}_y(t,s)dtds,z(0,0)\right\rangle+$$
$$+\int_0^{\lambda}\left\langle\int_0^{T}\int_s^{\lambda}\widetilde{H}_y(t,r)dtdr,z_s(0,s)\right\rangle ds+\int_0^{T}\left\langle\int_0^{\lambda}\int_t^{T}\widetilde{H}_y(\tau,s)d\tau\,ds,z_t(t,0)\right\rangle dt+$$
$$+\int_0^{T}\int_0^{\lambda}\left\langle\int_t^{T}\int_s^{\lambda}\widetilde{H}_y(\tau,r)d\tau\,dr,z_{ts}(t,s)\right\rangle dtds+\int_0^{T}\left\langle\int_0^{\lambda}\widetilde{H}_p(t,s)ds,z_t(t,0)\right\rangle dt+ \qquad (3.12)$$
$$+\int_0^{T}\int_0^{\lambda}\left\langle\int_s^{\lambda}\widetilde{H}_p(t,r)dr,z_{ts}(t,s)\right\rangle dtds+\int_0^{\lambda}\left\langle\int_0^{T}\widetilde{H}_q(t,s)dt,z_s(o,s)\right\rangle ds+$$
$$+\int_0^{T}\int_0^{\lambda}\left\langle\int_t^{T}\widetilde{H}_q(\tau,s)d\tau,z_{ts}(t,s)\right\rangle dtds+\int_0^{T}\int_0^{\lambda}\left\langle\widetilde{H}_u(t,s),\overline{u}(t,s)\right\rangle dtds+$$
$$+\int_0^{T}\int_0^{\lambda}\left\langle-\psi(t,s),z_{ts}(t,s)\right\rangle dtds+\int_0^{T}\left\langle-\psi_1(t),z_t(t,0)\right\rangle dt+\left\langle\int_0^{T}\widetilde{H}_{1z}(t)dt,z(0,0)\right\rangle+$$
$$+\int_0^{T}\left\langle\int_t^{T}\widetilde{H}_{1z}(\tau)d\tau,z_t(t,0)dt+\eta.\right.$$

В (3.12) учтем (3.4) и группируем подобные слагаемые, тогда

$$\Delta J(w)=\left\langle\sum_{i=1}^{k}\Phi_y(y(t_i,s_i))+\int_0^{T}\int_0^{\lambda}\widetilde{H}_y(t,s)dtds+\int_0^{T}\widetilde{H}_{1z}(t)dt,z(0,0)\right\rangle+$$
$$+\int_0^{T}\left\langle\sum_{i=1}^{k}\Phi_y(y(t_i,x_i))\delta(t_i-t)+\int_0^{\lambda}\int_t^{T}\widetilde{H}_y(\tau,s)d\tau\,ds+\int_0^{\lambda}\widetilde{H}_p(t,s)ds-\psi_1(t)+\right.$$
$$\left.+\int_t^{T}\widetilde{H}_{1z}(\tau)d\tau,z_t(t,0)\right\rangle dt+\int_0^{T}\int_0^{\lambda}\left\langle\sum_{i=1}^{k}\Phi_y(y(t_i,s_i))\delta(t_i-t)\delta(s_i-s)+\right.$$
$$\left.+\int_t^{T}\int_s^{\lambda}\widetilde{H}_y(\tau,r)d\tau\,ds+\int_s^{\lambda}\widetilde{H}_p(t,r)ds+\int_t^{T}\widetilde{H}_q(\tau,s)d\tau-\psi(t,s),z_{ts}(t,s))\right\rangle dtds+$$
$$+\int_0^{T}\int_0^{\lambda}\left\langle\widetilde{H}_u(t,s),\overline{u}(t,s)\right\rangle dtds+\eta.$$

Из (3.3), (3.5) имеем

$$z(0,0) = -\widetilde{n}^{-1}(T)\int_0^T\int_t^T n(\tau)d\,\tau\, z_t(t,0)dt \quad (3.13)$$

После некоторых преобразований и группировки подобных слагаемых, имеем:

$$\begin{aligned}\Delta J(w) = &\Big\langle \sum_{i=1}^{k} \Phi_y(y(t_i,s_i)) + \int_0^T\int_0^\lambda \widetilde{H}_y(t,s)dtds + \int_0^T \widetilde{H}_{1z}(t)dt, z(0,0) \Big\rangle + \\ &+\int_0^T \Big\langle \sum_{i=1}^{k} \Phi_y(y(t_i,x_i))\delta(t_i - t) + \int_0^\lambda \int_t^T \widetilde{H}_y(\tau,s)d\,\tau\, ds + \\ &+\int_0^\lambda \widetilde{H}_p(t,s)ds - \psi_1(t) + \int_t^T \widetilde{H}_{1z}(\tau)d\tau, z_t(t,0) \Big\rangle dt + \\ &+\int_0^T\int_0^\lambda \Big\langle \sum_{i=1}^{k} \Phi_y(y(t_i,s_i))\delta(t_i - t)\delta(s_i - s) + \int_t^T \int_s^\lambda \widetilde{H}_y(\tau,r)d\,\tau\, ds + \\ &\int_s^\lambda \widetilde{H}_p(t,r)ds + \int_t^T \widetilde{H}_q(\tau,s)d\tau - \psi(t,s), z_{ts}(t,s)) \Big\rangle dtds + \eta\end{aligned} \quad (3.14)$$

Потребуем, что $(\psi(t,s), \psi_1(t))$ являются решением системы сопряженных уравнений. Тогда

$$J(w+\overline{w}) - J(w) = \int_0^T\int_0^\lambda \langle \widetilde{H}_u(t,s), \overline{u}(t,s)\rangle dtds + \int_0^T \langle H_{1v}(t), \overline{v}(t) \rangle dt + \eta \,.$$

Можно показать, что при выполнении выше перечисленных условиях $|\eta| \le C \; \|\overline{w}\|^2_{L_2(Q)}$, где C>0 некоторое постоянное. Теорема 1 доказана.

Теорема 2. Пусть выполнены все условия теоремы 1 и $w_* = (v_*(t), u_*(t,s)) \in V \times U$ оптимальное управление в задаче (2.1)-(2.5), $y^*(t,s) = y(t,s;w_*)$- соответствующее решение краевой задачи (2.1)-(2.4), а $(\psi(t,s;w_*), \psi_1(t,w_*))$ -решение сопряженной системы, соответствующее управлению $(v_*(t), u_*(t,s))$. Тогда справедливо неравенство

$$\iint_Q \langle H_u(t,s,y^*(t,s), y_t^*(t,s), y_s^*(t,s), \psi(t,x,w_*), u_*(t,s)), u(t,s) - u_*(t,s) \rangle dtds +$$

$$+\int_0^T \langle H_{1v}(t, z^*(t,0), \psi_1(t,w_*), w_*(t)), v(t) - v_*(t) \rangle dt \ge 0$$

при всех $w = (v(t), u(t,s)) \in V \times U$.

Теорема доказывается с помощью идей из работы [7, стр. 561].

ЛИТЕРАТУРА

1. Ибиев Ф.Т., Шарифов Я.А. Об одной задаче оптимального управления для систем Гурса с интегральными условиями // Известия НАН Азербайджана, серия физико-технических и математических наук, 2004, т. 24, №2, с. 83-85.

2. Ибиев Ф.Т., Шарифов Я.А. Необходимо условие оптимальности в задачах оптимального управления системами Гурса с интегральными условиями //Вестник Бакинского Университета, серия физико-математических наук, 2004, №3, с. 13-20.
3. Ibiev F.T., Sharifov Ya.A. Necessary optimality conditions in problems of optimal control by the Goursat systems with multipoint boundary conditions //Transactions issue mathematics and mechanics, series of physical- technical and mathematical sciences, 2004, v. 24, №7, p.227-234.
4. Шарифов Я.А., Ширинов Т.В. Градиент в задаче оптимального управления для гиперболических систем с нелокальными условиями // Известия НАН Азербайджана, серия физико-математических и технических наук, 2005, т. 25, № 2, с. 111-116.
5. Васильев Ф.П. Методы оптимизации. М.: Факториал, 2002, 824 с.
6. Шарифов Я.А., Ширинов Т.В. Градиент в задаче оптимального управления для систем Гурса-Дарбу с неклассическими условиями // Математическое и компьютерное моделирования, серия физико-математических наук, 2010, в.3, с. 77-90.

PAYLANMIŞ VƏ SƏRHƏD İDARƏEDİCİLİ QEYRİ –LOKAL ŞƏRTLİ QURSA-DARBU SİSTEMLƏRİ ÜÇÜN OPTİMAL İDARƏETMƏ MƏSƏLƏLƏRİNDƏ OPTİMALLIQ ÜÇÜN ZƏRURİ SƏRTLƏR

Ə.R.SƏFƏRİ

XÜLASƏ

İşdə qeyri-lokal şərtli Qursa-Darbu sistemləri üçün paylanmış sərhəd idarəedicili optimal idarəetmə məsələsinə baxılmışdır. Sərhəd şərtləri xarakteristikalar üzərində diferensial tənliklərlə verilmişdir. Diferensial tənliklərin həlləri inteqral şərtlərini ödəyir. Funksionalın qradienti hesablanmış və optimallıq üçün zəruri şərtlər tapılmışdır.

NECESSARY OPTİMALİTY CONDİTİONS İN AN OPTİMAL CONTROL PROBLEM FOR GOURSAT-DARBOUX SYSTEMS WİTH BOUNDARY AND DİSTRİBUTED CONTROLS UNDER NONLOCAL CONDİTİONS

A.R.SAFARI

SUMMARY

In this work, we obtain necessary optimality conditions for the optimal control problem involving nonlinear Goursat-Darboux systems with nonlocal conditions and boundary controls. Boundary conditions are given on the characteristics as the decision of the differential equation and the decisions of the differential equation satisfy the integrated condition